



BYVoid
魔兽世界模拟赛

Stage.1

2009年10月3日

题目一览

题目	算法	难易度
血色先锋队	搜索	★ ★
灵魂分流药剂	动态规划	★ ★
地铁重组	递推 / 动态规划	★ ★ ★
埃雷萨拉斯寻宝	最短路径	★ ★ ★

比赛情况

- 共61人参赛
- 400分4人
- fjxmlhx shik sunnywkn lqp18_31
- 300分以上21人
- 200分以上36人

比赛情况

	100分	0分	平均分
血色先锋军	29人	6人	68
灵魂分流药剂	37人	3人	73
地铁重组	16人	24人	38
埃雷萨拉斯寻宝	16人	23人	44


比赛分析

- 血色先锋军是简单的广搜，灵魂分流药剂是经典动态规划问题，地铁重组是一个数学问题，埃雷萨拉斯寻宝是最短路径。
- 分析可以看出，大家对简单**DP**都很熟悉，广搜也尚可。而对数学问题和简单的图论掌握不够理想。

血色先锋军

重温题意，能够注意到，瘟疫是以时间为阶段逐步扩张的，而题目又要求输出某个血色领主最早的感染时间。所以，根据这个特性，自然地想到了宽搜的方法，如题中图

	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	2	3	3
3	2	3	3	2
4	3	3	2	1
5	3	2	1	0



首先，将所有感染源加入队列。然后，进入宽搜过程，将所有的格子搜索完毕，得到的即为每个格子得最早感染时间。

时间复杂度 $O(M*N)$

另外，还有一种算法：

对于所有的领主，枚举这个领主到所有感染源的距离，取最小值即可。

时间复杂度 $O(A*B)$

这种方法不能获得满分

这是一道简单题，考察基础算法。

灵魂分流药剂

对于每一瓶药剂，它有如下属性

对服用者造成 w 的肉体伤害

对服用者在成 v 的精神伤害

类别 t

对服用者造成的痛苦值

现有一个服用者，他的生命值为 A ，意志力为 B 。要拿若干瓶分流药剂，使总肉体折磨不超过 w ，总精神折磨不超过 B 的情况下，令总痛苦值最高。特别的，每个类别至多拿出一瓶药剂。

问题的转化

要使痛苦值最大，我们可以把痛苦值看成一种价值，把服用者的生命价值与意志力看作一个二维背包，把每瓶药剂的肉体折磨与意志折磨分别看作物品花费的两个维度。

这样，我们就将这个问题转化为一个背包问题。虽然是二维费用，我们仍能够通过增加一维来实现这个二维费用的背包问题。特别的，每个箱子中只能最多取出一瓶药剂。有些同学把物品作为决策阶段，这样会产生后效性，所以，我们要更换决策阶段。以每个箱子作为决策的阶段。

令 $f(i,j,k)$ 表示当服用者拥有 i 的生命值、 j 的意志力，且只用前 k 个箱子的药剂时所造成的最大痛苦值。

状态转移方程

$$f(i,j,k) = \max\{\max(f(i-w[k][m], j-v[k][m], k-1) + p[k][m], f(i,j,k-1))\}$$

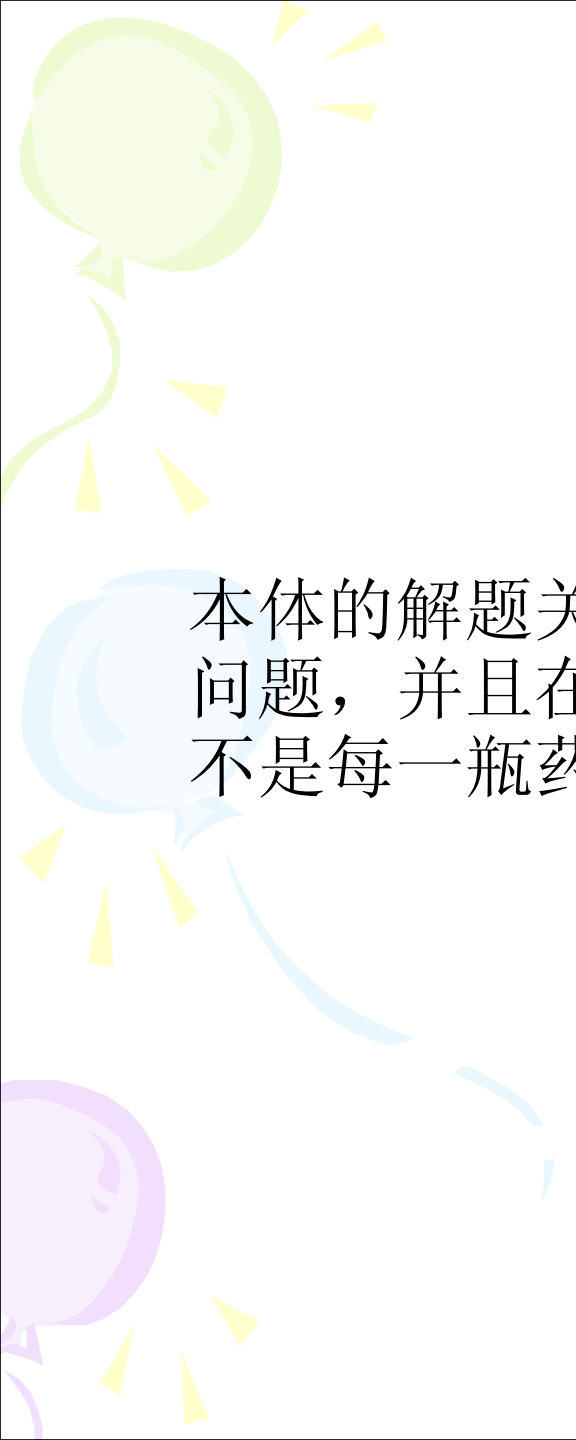
($m=1..$ 第 k 组的药剂数，并且保证 $0 \leq i-w[k][m]$ 且 $0 \leq j-v[k][m]$)

其中 $w[k][m]$ 与 $v[k][m]$ 分别表示第 k 个箱子的第 m 瓶药剂的肉体折磨与精神折磨

初始状态: $f(i,j,0)=0$

目标状态: $f(A,B,M)$

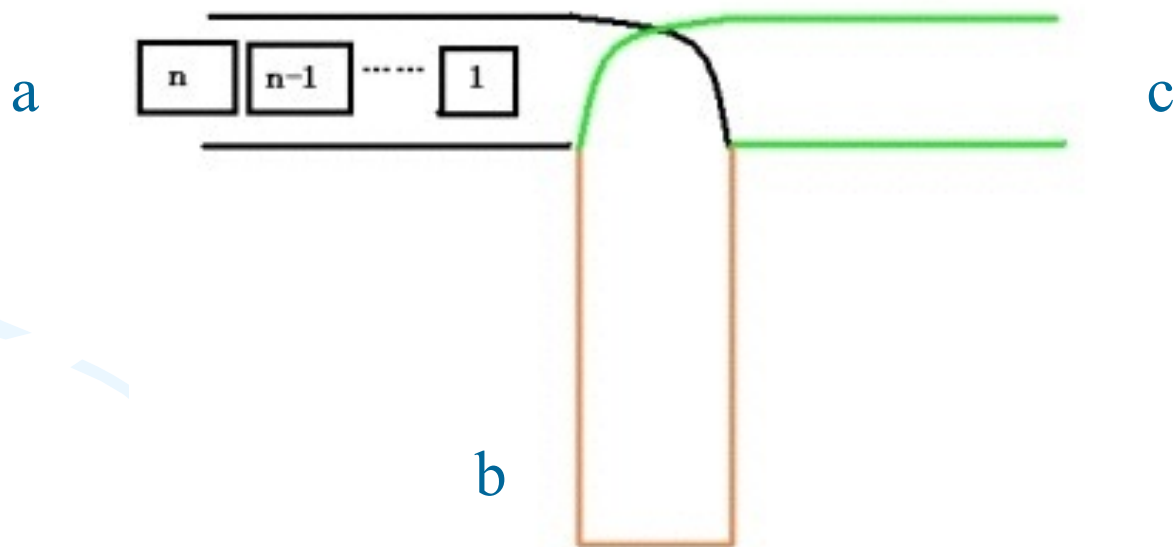
时间复杂度: $O(A*B*N)$

The background features a decorative border on the left side with three balloons: a green one at the top, a light blue one in the middle, and a purple one at the bottom. Each balloon is attached to a streamer and has several yellow triangular shapes around it, resembling confetti or streamer ends.

本体的解题关键是从题给问题转化到经典的背包问题，并且在决策阶段的选取上要着手于类别而不是每一瓶药剂上。

地铁重组

问题大意是一些元素位于a栈中，要将这些元素通过b栈，转移到c栈，如下图

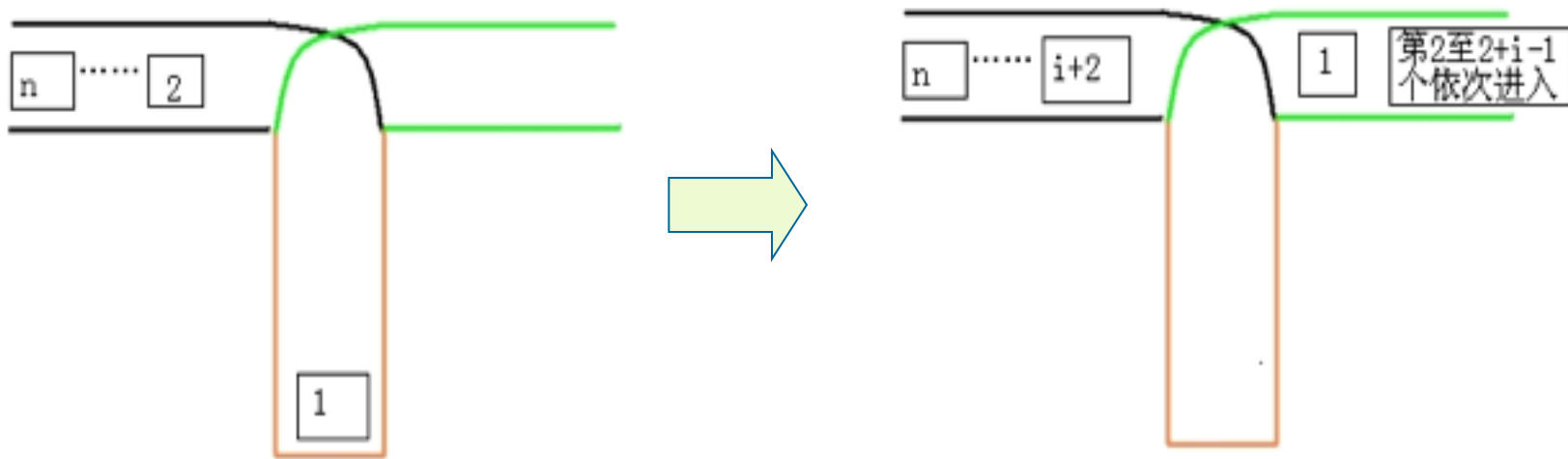




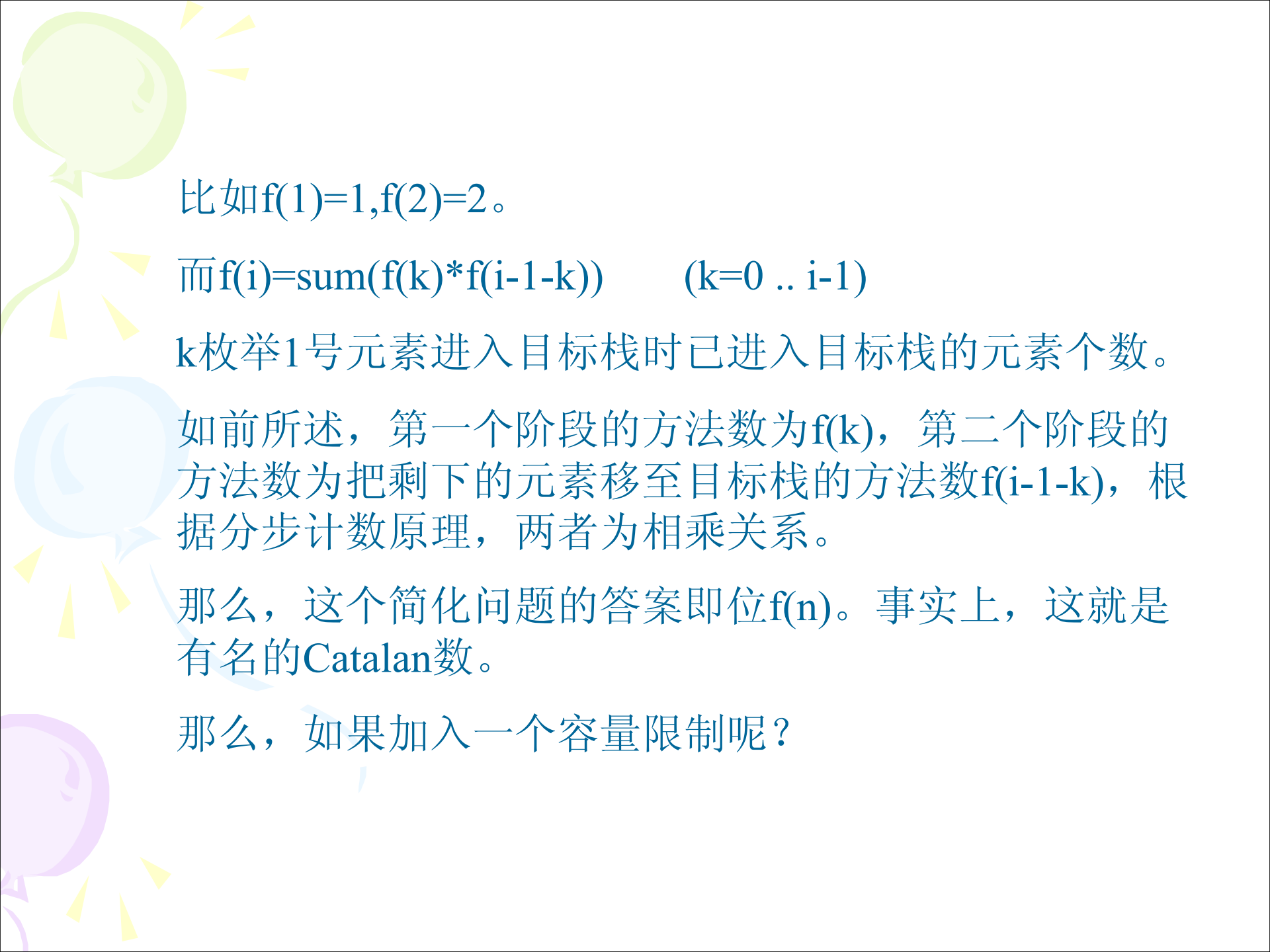
本题特殊之处在于b栈有一个容量限制。其中的元素个数最多不可超过p个，这该怎么处理呢？

我们可以先简化问题，来看看如果没有这个容量限制的情况。

可以注意到1号元素是一个很特殊的元素。在初始状态下，1号元素必须先行进入b栈，然后再处理后续元素，在以后的某个时刻，1号元素从b栈中进入c栈，然后还在a栈中的元素依次被处理。



可以看到，整个存储过程被分为两个阶段，一个是1号元素在中转栈，一个是1号元素进入目标栈后，而对于这两个阶段，存在一个相同的问题，就是将 i 个元素通过这种方式达到目标栈后的方法数，以 $f(i)$ 表示。



比如 $f(1)=1, f(2)=2$ 。

而 $f(i)=\sum(f(k)*f(i-1-k)) \quad (k=0 \dots i-1)$

k 枚举1号元素进入目标栈时已进入目标栈的元素个数。

如前所述，第一个阶段的方法数为 $f(k)$ ，第二个阶段的方法数为把剩下的元素移至目标栈的方法数 $f(i-1-k)$ ，根据分步计数原理，两者为相乘关系。

那么，这个简化问题的答案即为 $f(n)$ 。事实上，这就是有名的Catalan数。

那么，如果加入一个容量限制呢？

对两个过程依次分析。

在第一个过程中，中转栈一直有一个1号元素，所以第一个阶段在1的基础上，中转栈至多同时包含 $p-1$ 个元素，第二个阶段，1号元素出栈，中转栈最多同时包含 p 个元素，设 $f(i,j)$ 表示在中转栈容量为 j 的情况下，将 i 个车厢移入目标栈的方法数

$$f(i,j)=\sum(f(k, j-1)*f(i-1-k, j)) \quad k=0..i-1$$

$$\text{初始状态 } f(0,j)=1(j=0..n) \quad f(I,0)=0(I=1..n)$$

目标状态： $f(n,p)$

这个算法的时间复杂度为 $O(n^2 * p)$

然而，上述方法不是最优的，只能拿到70分。



要想拿到满分，必须跳出原有思维。从动态规划的角度考虑问题。

设 $f(i,j)$ ($i+j \leq n$)为a栈中有 i 个元素，b栈中有 j 个元素的方法数（c栈中有 $n-i-j$ 个元素）

$$f(i,j) = f(i+1, j-1) + f(i, j+1)$$

初始状态 $f(n,0) = 1$

目标状态 $f(0,0)$

时间复杂度 $O(np)$

该方法可以拿到100分



介绍一个小知识：

若用2的某次幂为模，对一个数进行求模（即算出这个数除以模之后的余数），是可以用位运算实现的。公式如下：

$$a \bmod 2^p = a \& (2^p - 1)$$

题目中给出的 $4096 = 2^{12}$ ，据上述公式

$$a \bmod 4096 = a \& (2^{12} - 1) = a \& (0xFFF)$$

埃雷萨拉斯寻宝

- 读懂题意，理解移动方式。
 1. 踏入一种结界后，再次踏入不受到伤害。
 2. 可以在同种结界内部传送。
 3. 只能移动到相邻的单元格。
- 显然，要想保留最大的生命值，必须受到最少的伤害。

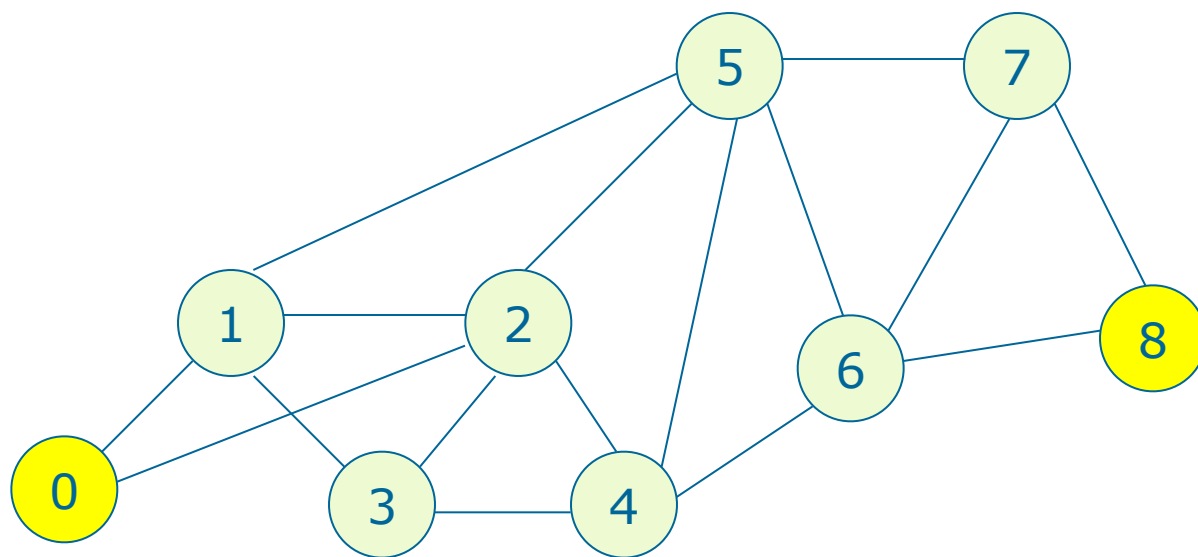
模型建立

- 由于在同种结界能可以任意传送，而且不会再次受到伤害，我们不妨把同种结界收缩成一个单元。
- 由于只能踏入相邻的单元格，只需考虑收缩后的单元之间的关系。
- 用图来描述。在此基础上，我们再加入一个超级源和超级汇，表示起始点和宝藏的位置。

模型建立

例如样例

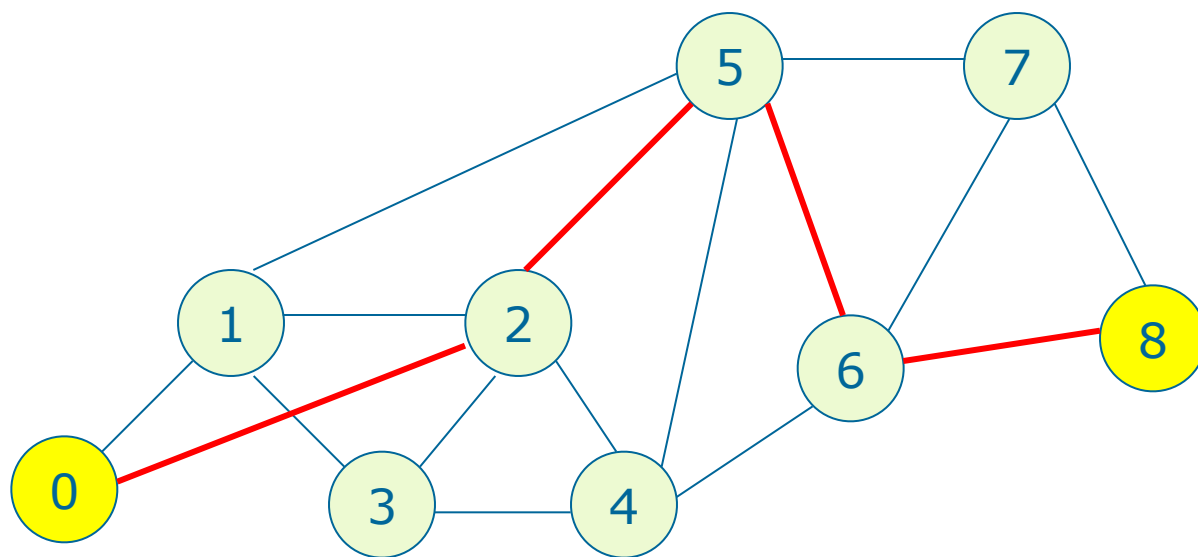
1	1	1	2	2	3
1	2	3	3	3	3
1	1	2	2	4	4
5	5	5	5	5	6
5	7	7	5	6	6
7	7	6	6	6	6



模型建立

例如样例

1	1	1	2	2	3
1	2	3	3	3	3
1	1	2	2	4	4
5	5	5	5	5	6
5	7	7	5	6	6
7	7	6	6	6	6

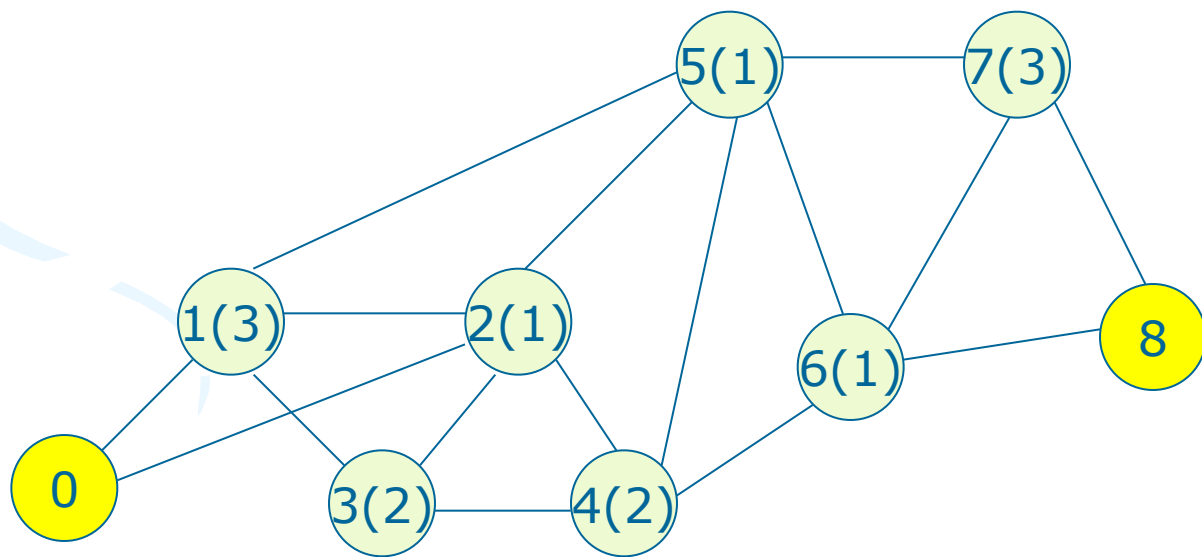


模型建立

- 我们把每个顶点赋予权值，为踏入这种结界的伤害值。
- 从起点拿到宝藏收到的最小伤害，就是求从超级源0到超级汇 $P+1$ ，经过的最小点权。

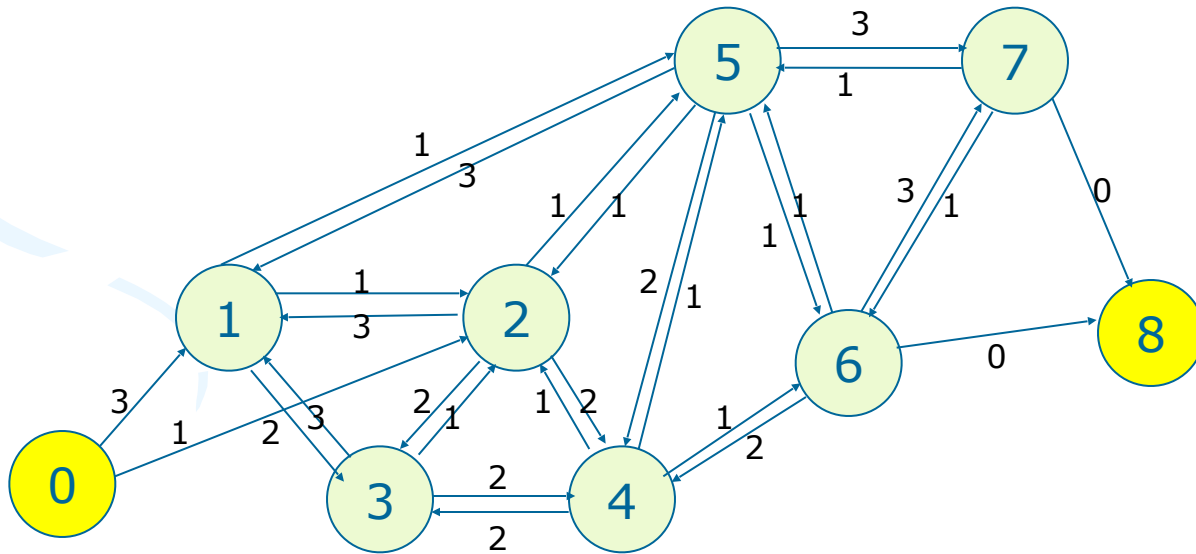
问题转化

- 现在，问题就转化为了求最小点权路径。但是这并不是经典的模型，所以我们要进一步转化为最短路径问题。



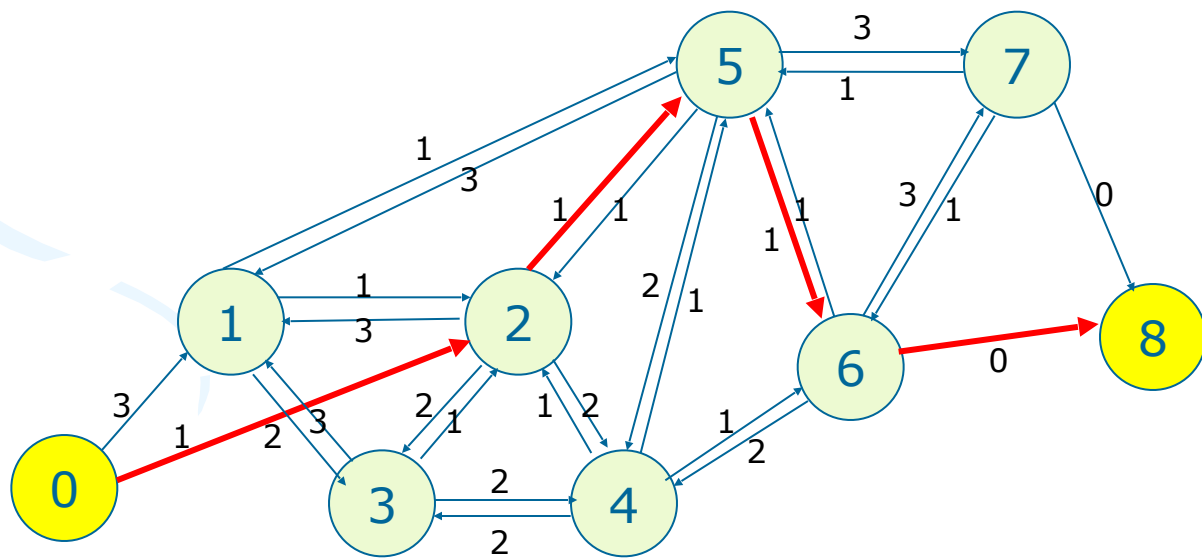
问题转化

- 把点权无向图转化为边权有向图。除了连接超级源和超级汇的边，每条边变成两条有向边，边权为有向边指向的顶点的原点权。



问题转化

- 根据以上建立的图，求从超级源到超级汇的最短路径。最短路径的长度就是我们要求的结果。



问题解决

- 根据上述方法，我们求出了穿越魔法结界受到的最小伤害值。假设该值为 A 。
- 如果 $A < H$
- 输出最大剩余生命值为 $H - A$ 。
- 如果 $A \geq H$
- 输出NO

谢谢

- 作者：BYVoid

- 欢迎访问 <http://www.byvoid.com>