BYVoid
魔兽世界模拟赛

Stage.2

2009年10月17日

题目一览

题目	算法	难易度
沙漠赛道	概率期望计算	★★
美酒节赛羊	动态规划	★★
地精的贸易	动态规划 背包问题	★★★
奥术能量环流	强连通分量	★★★★

比赛情况

- 共26人参赛
- 最高分230，200分以上有3人，分别为lqp18_31, suntian和Archive~A。
- 150分以上9人，100分以上19人。

比赛情况

	100分	**0**分	平均分
沙漠赛道	11人	8人	52.41
美酒节赛羊	0人	10人	31.85
地精的贸易	3人	11人	38.15
奥术能量环流	1人	20人	10.19

沙漠赛道

- 这是一道概率和期望相关的简单数学问题，只要掌握相关知识，认真理解题意，仔细做题，注意细节，就能不难拿到满分。

问题解决

- 只有两支队伍，四种事故。每种事故的发生概率都是事先给出的。我们可以求出两队胜利和平局的概率。
- 样例如下表

	陷入沙坑	零件损坏	撞击赛道	虫群袭击
侏儒队	**0.05**	**0.10**	**0.08**	**0.12**
地精队	**0.10**	**0.15**	**0.04**	**0.00**

概率计算

- 我们分析，可以知道侏儒队胜利的条件为侏儒队不发生事故且地精队至少发生一种事故，或两队都不发生事故且正常胜利。
- 而地精队胜利的条件为地精队不发生事故且侏儒队至少发生一种事故，或两队都不发生事故且正常胜利。
- 两队平局的条件为两队都发生事故。

概率计算

- 由于每种事故发生是相互独立事件。所以由表，我们可以算出侏儒队不发生事故的概率为P1=(1-0.05)*(1-0.10)*(1-0.08)*(1-0.12)≈0.692
- 则侏儒队至少发生一种事故的概率为~P1=1-P1=0.308
- 同理~P2=0.266

	陷入沙坑	零件损坏	撞击赛道	虫群袭击
侏儒队	**0.05**	**0.10**	**0.08**	**0.12**
地精队	**0.10**	**0.15**	**0.04**	**0.00**

概率计算

	动力	概率
侏儒	**120**	**0.6**
地精	**80**	**0.4**

- 两队平局的概率
- P0=(~P1)*(~P2)=0.082
- 我们知道两队的发动机动力指数，则正常情况下侏儒队胜利的概率分别为Q1=0.6和Q2=0.4。
- 所以侏儒队胜利的概率 PA=P1*(~P2)+P1*P2*Q1=0.489
- 地精队胜利的概率为
- PB=P2*(~P1)+P1*P2*Q2=0.429

期望计算

- 至此，我们算出了概率，要根据概率算出期望的方法如题中所述。

几何平均数

- 注意几何平均数的计算，由于每笔赌注的金额可能很大，一般的计算公式(a1*a2*……*an)^(1/n)可能会发生溢出错误。

- 把公式展开就不会发生错误了
- (a1^(1/n))*(a2^(1/n))*……*(an^(1/n))

^(1/n)

- 一个实数a的算数n次方根怎么求？
- 对于C++语言，直接调用函数pow(a,(1/n))即可。
- 对于Pascal语言，没有相应的函数。
- 可以用exp((1/n)*ln(a))算出a^(1/n)。

美酒节赛羊

- 这道题的动态规划特征十分明显。显然要动态规划解决问题。

- 可以发现，到达终点之前持续10秒慢速一定不是最优策略，因为我们可以很容易找到一种替代方案达到更好效果。所以我们要避免疲劳度达到上限。

动态规划

- 状态设定
- F[i,j]表示第i秒，疲劳度为j时，行进的最远距离。

状态转移方程

- F[i,j]=Max
- {
  - F[i-1,j+1]+1
  - F[i-1,j-2]+5
  - F[i-1,j-5]+10
  - F[i-1,0]+1 (j=0)
- }

- 慢速
- 中速
- 快速
- 恢复到0，仍然慢速

状态优化

- 对于极限数据，状态数组会超过空间限制。我们发现每个状态F[i,j]只与F[i-1,k]有关，所以我们可以用滚动数组优化。

地精的贸易

- 买卖问题，两方物品有差价，在有限的金钱的前提下，求出往返两次买卖的最大获利。
- 这是一个典型的背包问题。只要看出问题的关键，抽象出其数学模型，就能解决问题。

问题转化

- 我们首先只考虑第一次买卖，最初有N个金币，M种商品，已知每种商品的购买价格Ai和卖出价格Bi。
- 转化为背包问题，看做我们有一个容量为N的背包，有M件物品，每种物品的体积为Ai，价值为Bi-Ai。
- 由于每件物品拿取的数量没有限制，用无限背包解决。

动态规划

- 状态设定
- F[i]为容量为i的背包，拿取的物品的最大价值。

- 状态转移方程

- F[i]=Max{ F[i-A[j]] | j=1..M}
- 目标状态 F[N]

问题解决

- 一次动态规划以后，我们求出了第一次买卖的最大获利F[N]。现在进行第二次买卖，现在的金币数量为N+F[N]，有M件物品，已知每种商品的购买价格Bi和卖出价格Ai。

- 仍然转化为背包，我们有一个容量为N+F[N]的背包，有M件物品，每种物品的体积为Bi，价值为Ai-Bi。

问题解决

- 与第一次背包相同，再进行一次动态规划。即可求出第二次的最大获利。
- 两次最大获利的和就是菲利克斯一次来回最多能够赚到的金币数。
- 要在动态规划的过程中记录决策，然后再根据决策算出方案以输出。

注意

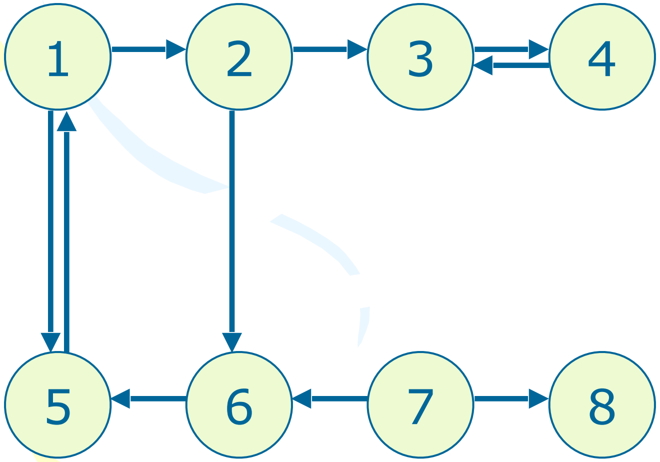
- 贪心策略是错误的，很容易找到反例。
- 注意数据类型和数组大小，尤其是第二次动态规划，不超过400,000，而不是100,000。
- 无限背包问题要用一维的动态规划解决。否则会超过空间限制。

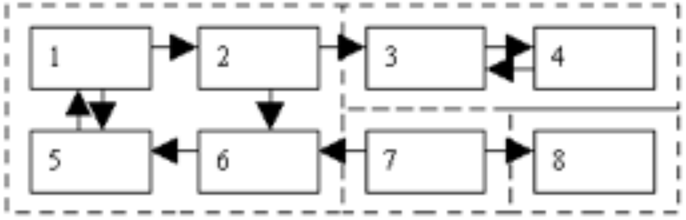
奥术能量环流

- 理解题意，极大奥术能量环流就是极大强连通子图，即强连通分量。
- 在有向图G中，如果两个顶点间至少存在一条路径，称两个顶点强连通(strongly connected)。如果有向图G的每两个顶点都强连通，称G是一个强连通图。非强连通图有向图的极大强连通子图，称为强连通分量(strongly connected components)。

构图

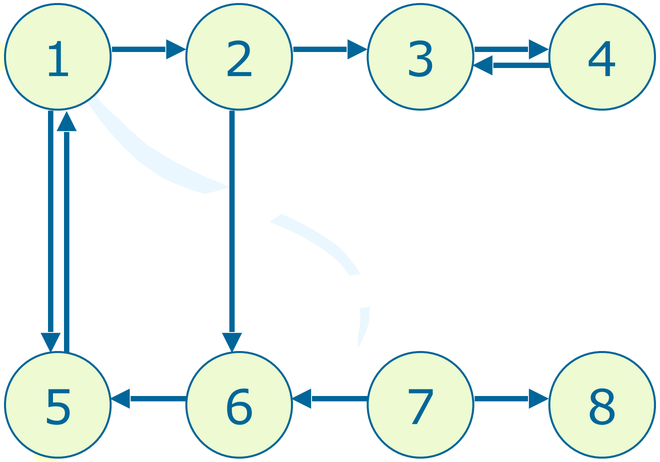
- 首先根据输入格式构图。每个格子有16种不同的格式，用二进制位表示向每个方向发射有向边。



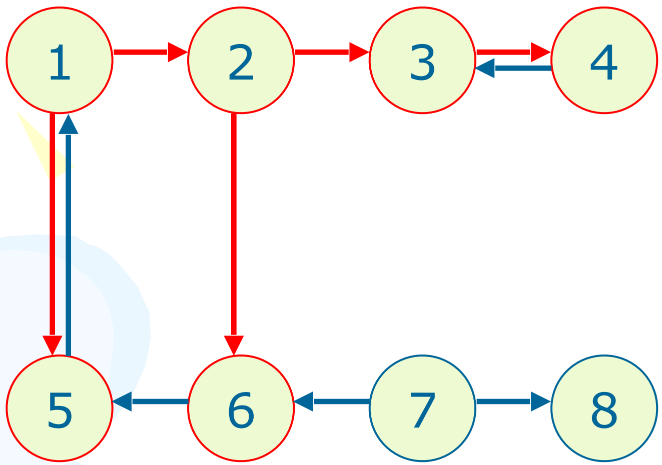


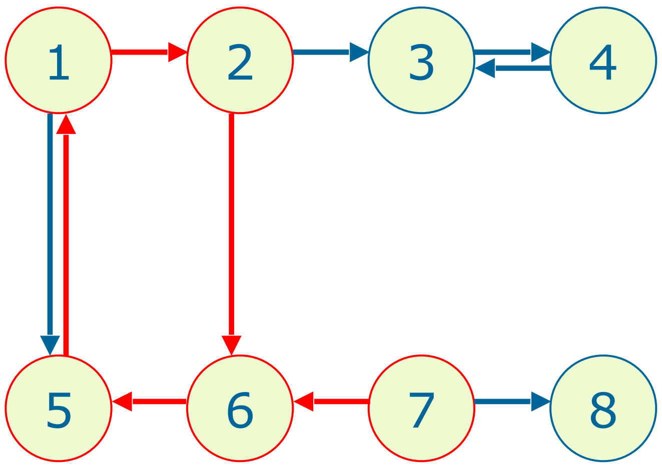
强连通分量

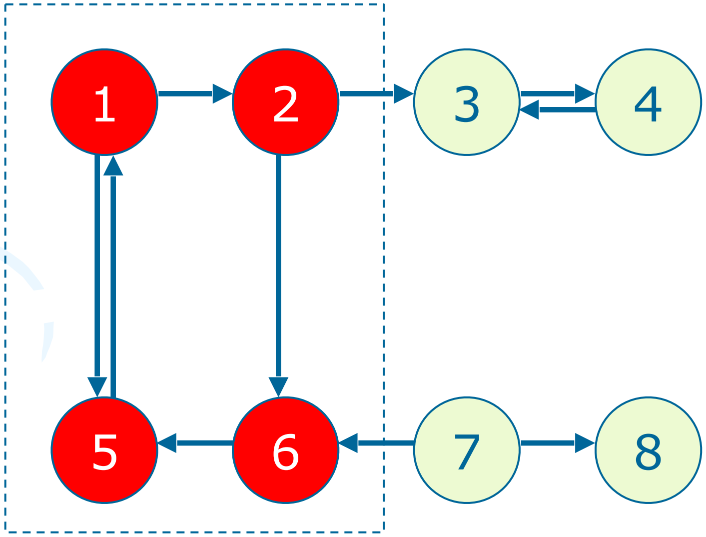
- 下面给出一个求强连通分量的O(N^2)的算法。我们只需从每个没有被标号的点开始，按照正图搜索一遍，再从这个点开始按照逆图搜索一遍，两遍搜索到的点的交集就是一个强连通分量。



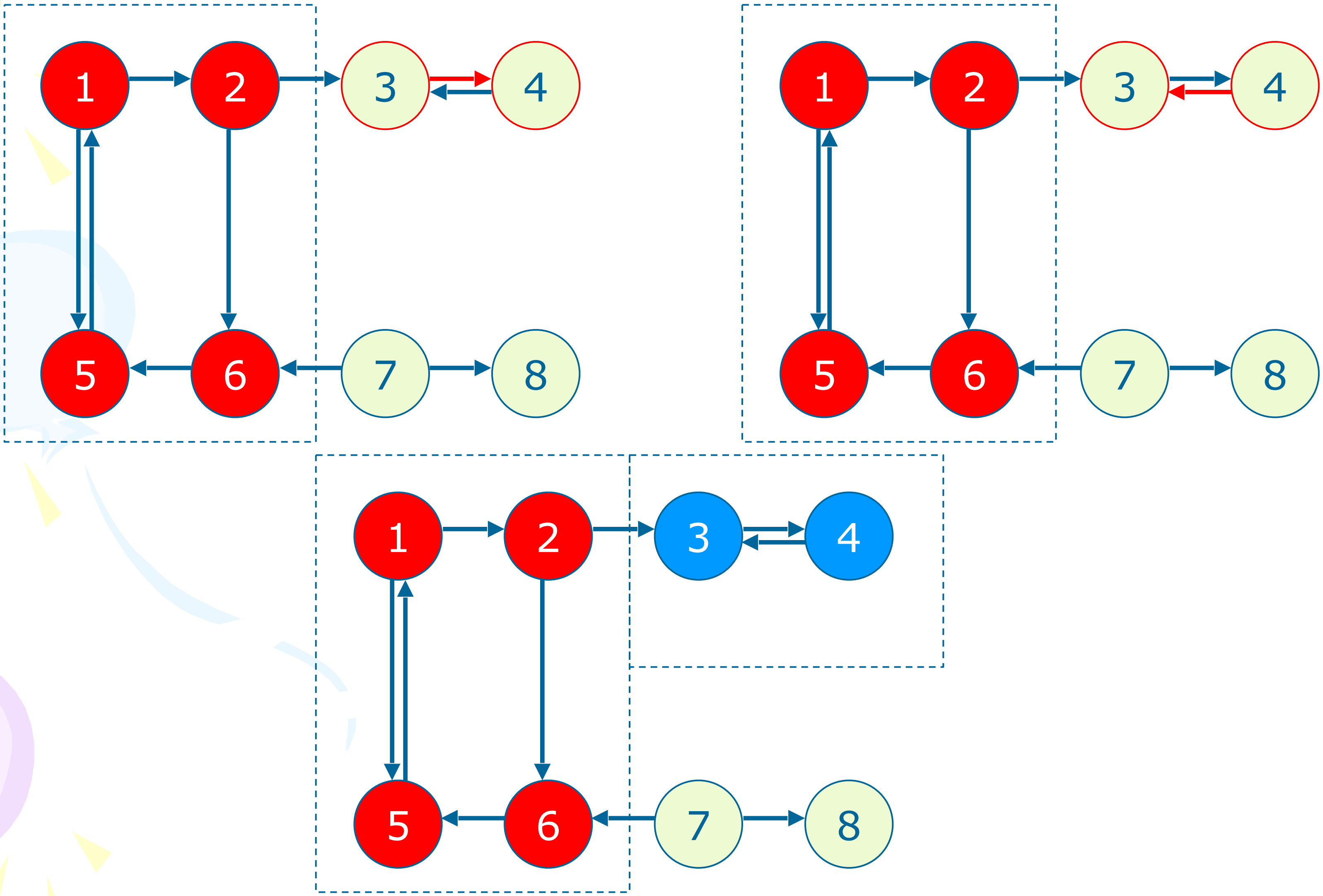
强连通分量



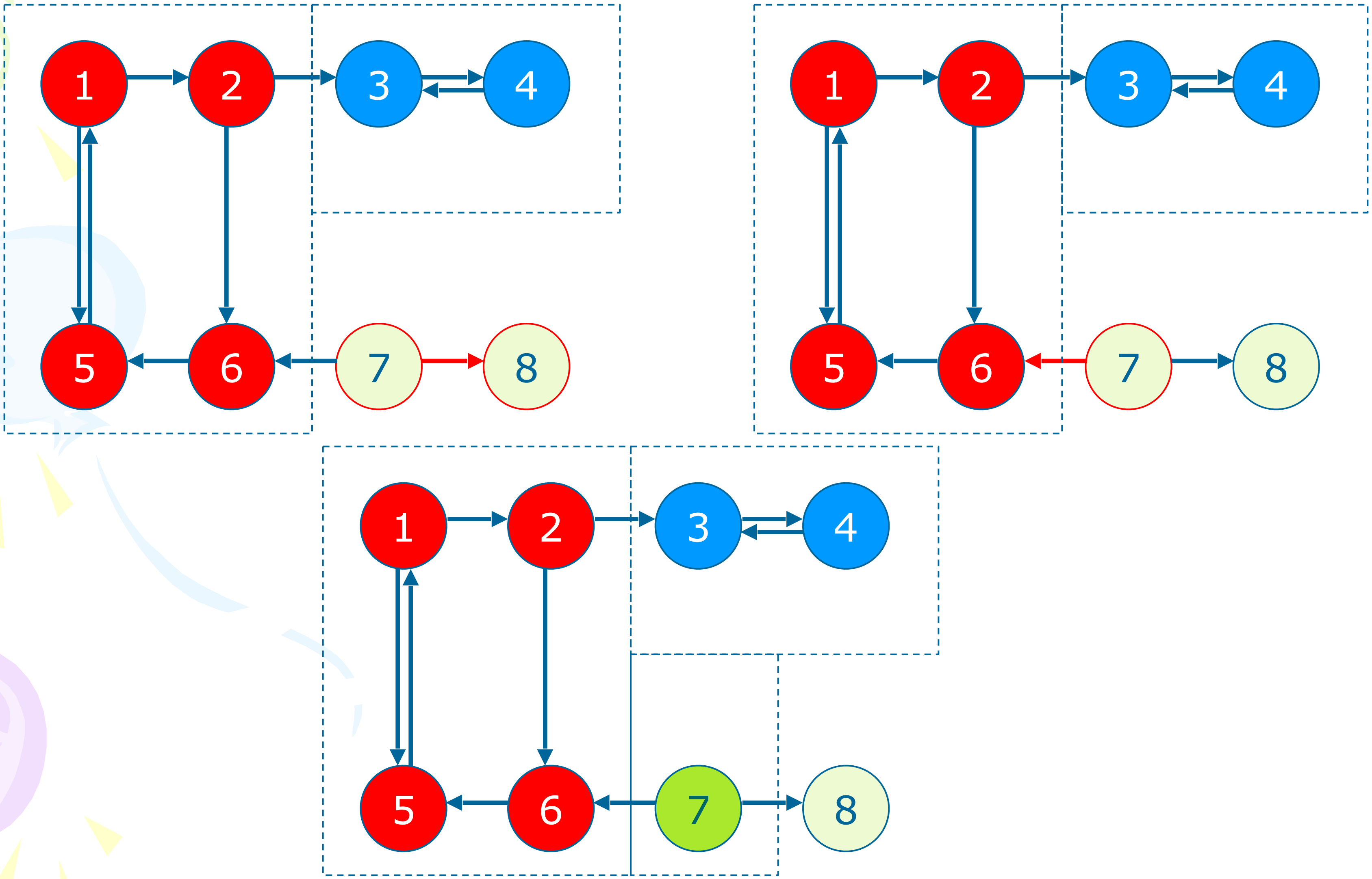




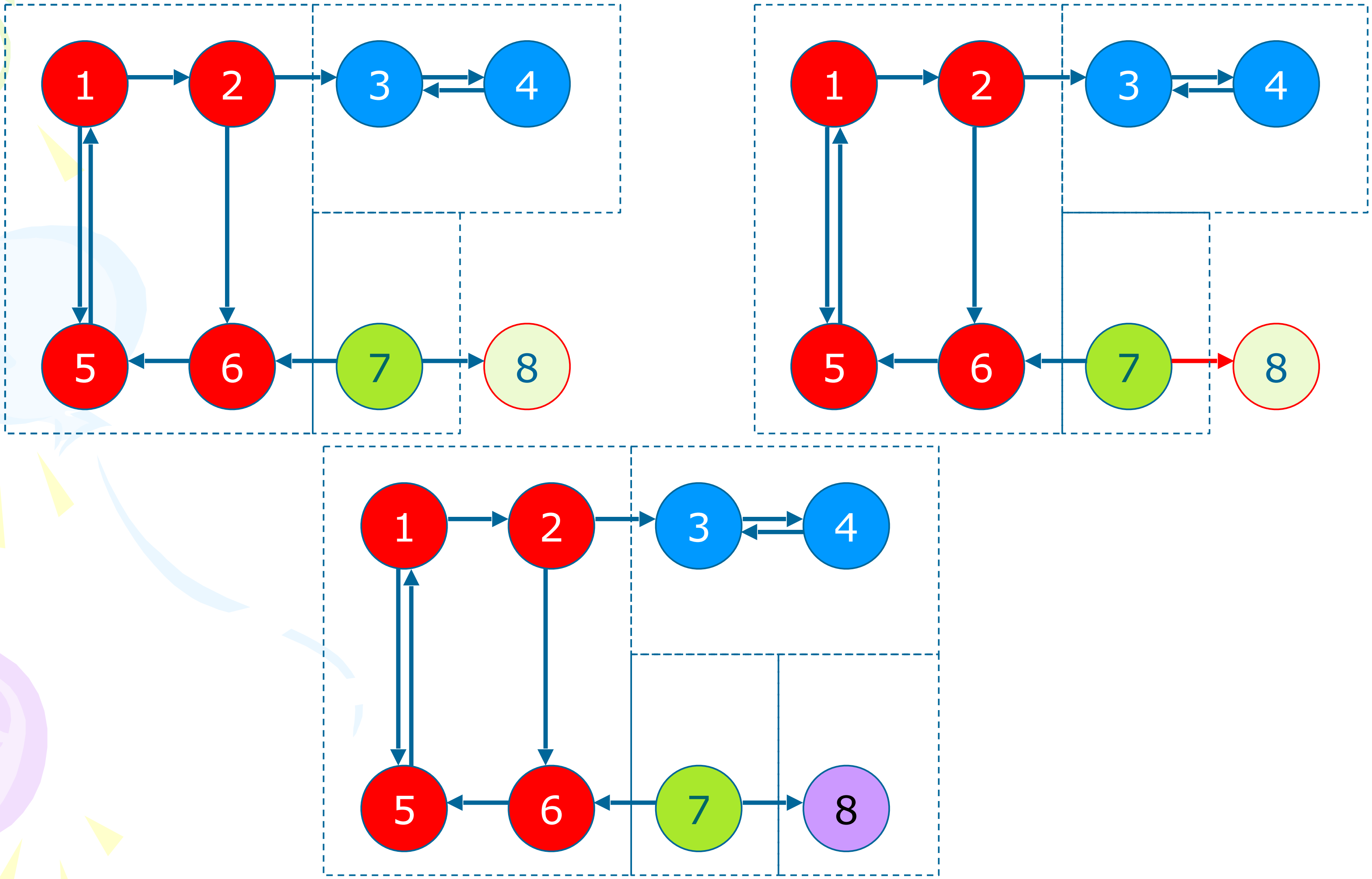
强连通分量



强连通分量

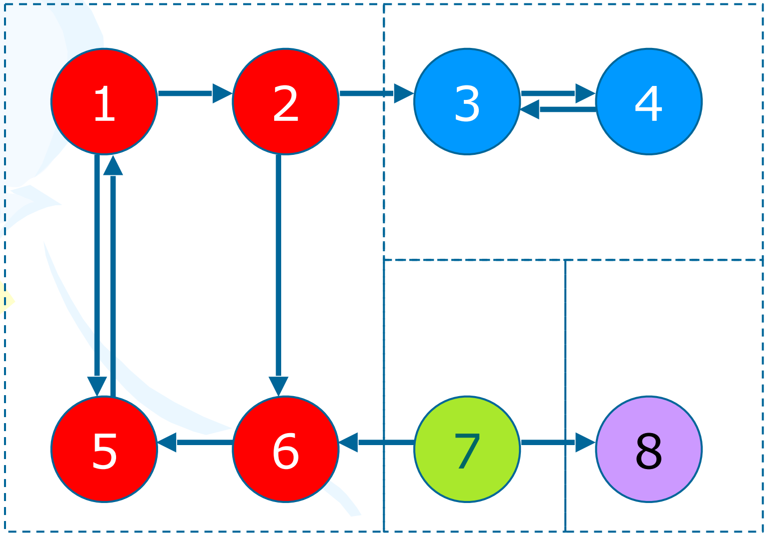


强连通分量



强连通分量

- 至此，我们求出了所有强连通分量，只需统计图中有多少个大于1的强连通分量。



强连通分量

- 上述算法为求强连通分量的朴素算法，由于NOIP难度限制，本题用朴素算法即可获得满分。
- 事实上求强连通分量有线性的算法如Tarjan，如果你感兴趣，欢迎阅读《有向图强连通分量的**Tarjan**算法》
- http://www.byvoid.com/blog/scc-tarjan/

谢谢

- 作者：BYVoid
- 欢迎访问 http://www.byvoid.com