BYVoid魔獸世界模擬賽 Stage.4

解題報告

扭曲的能量

給定一個數列，維護其逆序對的個數，要求支持“修改”操作，即修改數列中某一位的值，並在修改後求出新的逆序對的個數。

算法一

如果給定了一個數列，求其逆序對的個數，最簡單的方法是對每個數求其後面的比它小數的個數，然後累加起來，不過這樣一次求的時間複雜度就高達O(N2)。一個經典的方式是歸並排序法，即利用歸並排序的思想，只在歸並時統計，時間複雜度就可以優化至O(NlogN)。具體方法爲將數列不斷二分，回溯時歸並二分的兩個子數列，統計逆序對的個數，累加到最終結果。
于是對于這個題，一個最簡單的算法就是在每次修改時，重新求逆序對個個數，時間複雜度爲O(QNlogN)。

算法二

可以發現算法一有大量的冗餘，原因就是每次只修改了一個數，却重新求了整個數列的逆序對個數，一個容易想到的優化就是只求變化量。假設我們要修改第k個數，方法爲在修改之前，求出第k個數前面大于第k個數的個數與第k個數後面小于第k個數的個數之和，簡記爲F[k]，修改第k個數的值以後，再次求出F[k]，兩次F[k]的差值就是修改第k個數以後的變化量。
這種方法每次修改爲O(N)，加上最初的一次O(NlogN)的求逆序對個數，時間複雜度爲O(NlogN + QN)。

算法三

上述算法的瓶頸還是在于每次修改，如何優化修改的效率就成了重點，算法二的方法是樸素地掃描一遍整個數列，求出與其逆序的數目，因此造成了效率低下。
一個有效的方法就是用綫段樹維護一個區間內小于（或大于）某個值的元素的數目。綫段樹的本質思想是二分區間，直到單元素區間直接解决。一個單元素區間容易判斷小于某個數的元素數目，要麽是0要麽是1，合並兩個區間就成了問題，因爲查詢的值不定，所以要維護一個列表，而且這個列表可能相當大。如何不維護這樣一個列表呢？只好使用平衡樹（平衡二叉查找樹）。在綫段樹的每

個節點上維護一個平衡樹，其中存儲這個區間內所有的數值。查詢一個綫段樹上區間內小于x的元素個數，只需找到對應節點上的平衡樹，求這個平衡樹上小于x的元素個數，即用Rank(x)的方法，時間複雜度爲O(logN)。
用這種方法，一次修改時間複雜度就是O(logNlogN)，總時間複雜度爲O(NlogN + QlogNlogN)。

卡贊群島

構造圖論模型，把每個島嶼看作一個頂點，島嶼之間的航線看成一條邊，權值爲費用。根據條件，可以得出圖中的一個邊雙連通分量就是一個商業聯盟。由于在一個商業聯盟內所有航行都是免費的，可以把一個商業聯盟收縮成一個頂點，這時所有商業聯盟形成了一棵樹。問題就成了求樹中每個頂點可以到達的帶費用最遠的距離，然後樹形動態規劃就行了。

具體的步驟爲
1、求出無向圖的橋。
2、刪除橋後，每個連通塊就是一個邊雙連通分量，收縮爲一個頂點。
3、把橋加到新圖中，形成一棵樹。
4、在樹中進行動態規劃，求出每個點可以到達的帶費用最遠的距離。

血帆海盜

要想知道封閉一條航線貿易合作夥伴數量會不會减少，首先要求出最多能够建立的貿易合作夥伴的數量。由于一個貿易合作夥伴只能包含東西部各一個港口，可以看成一個二分圖，每個港口爲一個頂點，西部港口爲X集合，東部港口爲Y集合，一條航線爲連接二分圖兩部頂點的一條邊。這樣一個貿易合作夥伴就可以看作是連接兩個港口的一條邊，而且被連接的兩個港口不能再去與其他港口連接，正好對應了二分圖的匹配。顯而易見，最多能够建立的W個貿易合作夥伴，就是二分圖最大匹配數。接下來問題就轉化爲，如果只能刪除一條邊，求出刪掉哪些邊以後，最大匹配數會减少。

算法一

一個容易想到的方法是枚舉每一條邊，將之刪除後重新求最大匹配，計算新的最大匹配數，判斷是否减少了。如果是，則說明這條邊是滿足要求的一條邊，否則不是。然後將這條邊再加回到圖中，繼續枚舉。一個容易想到的優化就是只枚舉初始最大匹配上的邊，因爲如果刪除一條不在最大匹配上的邊，一定不會影響最大匹配數。只有刪除一條在最大匹配上的，才有可能使最大匹配數减少。
由于只用枚舉最大匹配上的邊，枚舉量一下子减少到了O(N)，時間複雜度成功得優化到了$O(N^2M)$。

算法二

要想進一步優化，必須更深一步對該問題進行分析。
考慮將二分圖匹配轉化爲網絡流模型，求出網絡最大流後，在殘量網絡上的滿流邊(v,u)的反向邊(u,v)是最大匹配上的邊。問題轉化爲一個二分圖網絡上，刪除哪一條邊以後，最大流流量不變。
如果(v,u)在殘量網絡的某個有向環上，那麼可以證明刪除這條邊後網絡最大流不變。原因很容易解

釋，由于允許只刪除一條邊，所以如果最大匹配數如果減少的話，一定減少爲W-1。什麼時候不減少呢？就是在存在一條別的替代邊的時候，這個時候一條邊被封鎖了，還可以繞過去。這樣的一條替代邊一定和被刪除邊在同一個有向環上。
所以最終的結論是：任何一條可以刪除的邊的兩端頂點一定屬一個強連通分量，求出殘量網絡的所有強連通分量，標記出不可刪除的邊，就可以得到最終答案。
該算法只需要求一次最大匹配O(NM)，然後在殘量網絡上求出強連通分量O(M)，總時間複雜了爲O(NM)。